SUBJECT:

٣. إذا كان أحد جذور المعادلة المميزة حقيقي وكرر l مرة.

$$M_1 = M_2 = ______ M_l$$

$$\varphi(D) = (D - M)^l \cdot \psi(D) \qquad ; \psi(M_1) \neq 0$$

في هذه المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة تكون من الشكل:

$$\varphi(D) \cdot y = 0$$

$$(D - M)^l \cdot \psi(D) \cdot y = 0$$

بكون $\psi(D) \cdot e^{mx} = \psi(m) \cdot e^{mx}$

عندئذ تكون المعادلة من الشكل:

$$\psi(M_1) \cdot (D - M_1)^l \cdot y = 0$$

$$e^{M_1 x} \cdot x e^{M_1 x} \cdot x^2 \cdot e^{M_1 x} ______ x^{l-1} \cdot e^{M_1 x}$$

ولكن حلول المعادلة

$$(D - M_1)^l \cdot y = 0$$

كما وجدنا في محاضرة سابقة هي:

$$e^{m_1 x} \cdot x \cdot e^{M_1 x} \cdot x^2 \cdot e^{M_1 x} ______ x^{l-1} \cdot e^{M_1 x}$$

وفي هذه الحالة يكون الحل العام من الشكل:

$$y_h = e^{m_1 x}(A_1 + A_2 x + A_3 \cdot x^2 + ______ + A_l \cdot x^{l-1}) +$$

$$A_{l+1} \cdot e^{m_{l+1} x} + ______ A_n \cdot e^{M_n x}$$

لنفرض أن $M_1 = \alpha + i\beta$ جذر المعادلة المميزة ومكرر l مرة وبالتالي بأن $M_2 = \alpha - i\beta$ هو أيضاً جذر للمعادلة المميزة ومكرر أيضاً l مرة في هذه الحالة يكون الحل العام هو:

$$y_h = e^{\alpha x}\left[(A_1 + A_2 x + ______ + A_l \cdot x^{l-1}) \cdot \cos\beta x + (A_{l+1} + A_{l+2} x + ______ + A_{2l} x^{l-1}) \sin\beta x\right]$$

$+ A_{2l+1} \cdot e^{M_{2l+1} x} + ____ + A_n \cdot e^{M_n x}$

أمثلة: ١. أوجد الحل العام للمعادلة : $y' + 5y = 0$ -1-

الحل: المعادلة المميزة هي $M + 5 = 0 \Leftarrow M = -5$

$y_h = A \cdot e^{-5x}$

2- $y' - 2y = 0$

$M - 2 = 0 \Longrightarrow M = 2$

$y_h = A \cdot e^{2x}$

٢- أوجد حلول المعادلة: $y'' - 5y' + 4y = 0$

المعادلة المميزة هي

$m^2 - 5m + 4 = 0$

$(m_1 - 1)(m_2 - 4) = 0$

إما $M_1 = 1$ أو $M_2 = 4$

$y_h = A_1 \cdot e^{x} + A_2 \cdot e^{4x}$

٣. أوجد الحل العام $y'' + 5y' + 6y = 0$

$M^2 + 5M + 6 = 0$

$(M + 2)(M + 3) = 0$

$M_1 = -2$ $M_2 = -3$

$y_h = A_1 \cdot e^{-2x} + A_2 \cdot e^{-3x}$

٤ $y'' + 2y' - 3y = 0$

المعادلة المميزة $M^2 - 2M - 3 = 0$

SUBJECT: / /

$(M-3)(M+1)=0$

$M_2=3 \qquad M_1=-1$

$y_h = A_1.e^{-x} + A_2.e^{3x}$

٥- أوجد الحل العام للمعادلة :

$y''-4y=0$

المعادلة المميزة هي $M^2-4=0$

$(M-2)(M+2)=0$

$M_2=-2 \qquad M_1=2$

$y_h = Ce^{2x} + D.e^{-2x}$

حيث C و D ثوابت كيفية .

٦- أوجد الحل العام للمعادلة $y''+3y'=0$

المعادلة المميزة هي $M^2+3M=0$

$M(M+3)=0$

$M_1=0 \qquad M_2=-3$

$y_h = A + B.e^{-3x}$

٧. أوجد الحل العام للمعادلة $y''+9y=0$

$M^2+9=0$

$M^2=-9 \Rightarrow M^2=9i^2$

$M_1=-3i \quad ; \quad M_2=3i$

الحل العام هو : $\alpha=0 \quad , \quad \beta=3$

$y_h = A_1.\cos 3x + A_2 \sin 3x$

AL DOUHA

٨- أوجد الحل العام للمعادلة: $y'' + 2y' + 2y = 0$

المعادلة المميزة هي

$$M^2 + 2M + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 4 - 4(1).(2)$$
$$= 4 - 8 = -4 = 4i^2$$

$$M_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$M_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

وبالتالي فإن الحل العام:

$$y_h = e^{-x}(A_1 . \cos x + A_2 . \sin x)$$

قاعدة الحلول هي

$$y_1 = e^{-x} . \cos x \quad ; \quad y_2 = e^{-x} . \sin x$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 3y' + 5y = 0$$

المعادلة المميزة هي

$$M^2 + 3M + 5 = 0$$
$$\Delta = 9 - 20 = -11 = 11 i^2$$

$$M_1 = \frac{-3 + \sqrt{11}\, i}{2}$$

$$M_2 = \frac{-3 - \sqrt{11}\, i}{2}$$

الحل العام هو:

$$y_h = e^{-\frac{3}{2}x}\left(A_1 . \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + A_2 . \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x\right)$$

SUBJECT

* أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$M^2 - 8M + 16 = 0$$

$$(M-4)^2 = 0 \Rightarrow M_1 = M_2 = 4$$

الحل العام هو

$$y_h = e^{4x}(A_1 + A_2 x)$$

قاعدة الحلول هي

$$y_1 = e^{4x} \quad , \quad y_2 = x \cdot e^{4x}$$

---

* أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$M^2 + 6M + 9 = 0$$

$$(M+3)^2 = 0$$

$$M_1 = M_2 = -3$$

أي أن الحل العام هو

$$y_h = e^{-3x}(B_1 + B_2 x)$$

---

* أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y''' - y = 0$$

الحل: المعادلة المميزة

$$M^3 - 1 = 0$$

$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = 1$$

$$(M-1)(M^2 + M + 1)$$

$M - 1 = 0$ أي أن

$$M_1 = 1$$

أو $M^2 + M + 1$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$$

$$M_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$M_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x^3 + (\quad)x^2 + (\quad)x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$$

$x_3 \quad x_2 \quad x_1$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Long division of $M^3 - 1$ by $M - 1$:

$$M^2 + M + 1$$

$$\mp M^3 \pm M^2$$

$$M^2 - 1$$

$$\mp M^2 \pm M$$

$$M - 1$$

$$\mp M \pm 1$$

$$0 \quad 0$$

الحل العام هو: $y_h = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + A_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + A_3 e^{x}$

5- أوجد الحل العام للمعادلة: $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

الحل: المعادلة المميزة: $M^3 + 6M^2 + 12M + 8 = 0$

$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = -\frac{d}{a} = -8 = -1 \cdot 8$ ×

$-1 \quad +8$ ×

$-2 \quad 4$

$2 \quad -4$

ل $M = -2$

$(M+2)(M^2+4M+4)$

$(M+2)^3 = 0$

إذن $M_1 = M_2 = M_3 = -2$

$y_h = e^{-2x}(A_1 + A_2 x + A_3 x^2)$

---

*- أوجد الحل العام للمعادلة: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

الحل: المعادلة المميزة $M^3 - 6M^2 + 11M - 6 = 0$

$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = -\frac{d}{a} = 6$

نلاحظ بأن العدد (1) يحقق المعادلة لذلك هو جذر

$(M-1)(M^2 - 5M + 6) = 0$

$(M-1)(M-2)(M-3) = 0$

$M_1 = 1 \; ; \; M_2 = 2 \; ; \; M_3 = 3$

$y_h = A_1 e^{x} + A_2 e^{2x} + A_3 e^{3x}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & M^2 - 5M + 6 \\
\hline
M-1 & M^3 - 6M^2 + 11M - 6 \\
 & \mp M^3 \pm M^2 \\
\hline
 & -5M^2 + 11M - 6 \\
 & \pm 5M^2 \mp 5M \\
\hline
 & 6M - 6 \\
 & \mp 6M \pm 6
\end{array}
$$

SUBJECT:

-1- إن الشكل العام لمعادلة من الدرجة الرابعة هو

-1- $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

لهذه المعادلة أربعة جذور

لإيجاد هذه الجذور الأربعة نفرض أولاً أن $x=\lambda-\frac{a}{4}$

$$x^2=\lambda^2-\frac{a}{2}\lambda+\frac{a^2}{16}$$

$$x^3=\lambda^3-3\frac{a}{4}\lambda^2+3\frac{a^2}{16}\lambda-\frac{a^3}{64}$$

$$x^4=\lambda^4-4\lambda^3\cdot\frac{a}{4}+6\lambda^2\cdot\frac{a^2}{16}-4\lambda\frac{a^3}{64}+\frac{a^4}{256}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة:

$$\lambda^4+p\lambda^2+q\lambda+r=0$$

أي أحصل على معادلة من الدرجة الرابعة بحذف الحد x^3 ونتبع المعادلة المساعدة:

شكل المعادلة من الدرجة الثالثة الآتية:

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$$

ولهذه المعادلة ثلاثة جذور هي z_1, z_2, z_3

عندئذ

$$2\lambda_1=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}$$

$$2\lambda_2=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}$$

$$2\lambda_3=-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}$$

$$2\lambda_4=-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y^{(4)}+4y'''+6y''+4y'+5y=0$$

المعادلة المميزة هي :

$$M^4 + 4M^3 + 6M^2 + 4M + 5 = 0$$

نفرض أن $M = \lambda - 1$

$$M^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$M^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$M^4 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

نعوض في المعادلة

~~$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 12\lambda - 4 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 + 4\lambda - 4$~~

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$$
$$+ 4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 12\lambda - 4$$
$$6\lambda^2 - 12\lambda + 6$$
$$4\lambda - 4$$
$$+5$$

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

$$p = 0 \quad ; \quad q = 0 \quad ; \quad r = 4$$

$$Z^3 + (0 - 16)Z - 0 = 0$$

$$Z^3 - 16Z = 0$$

$$Z(Z^2 - 16) = 0$$

$$Z_1 = 0 , \quad Z_2 = 4 \quad ; \quad Z_3 = -4$$

$$2\lambda_1 = \sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3} = 0 + 2 + 2i \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i$$

نعوض في الفرض :

$$M_1 = 1 + i - 1 = i$$

$$2\lambda_2 = \sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3} = 0 - 2 - 2i \Rightarrow \lambda_2 = -1 - i$$

$$M_2 = -2 - i$$

$$2\lambda_3 = -\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3} = 0 + 2 - 2i \Rightarrow \lambda_3 = 1 - i$$

$$M_3 = -i$$

SUBJECT: /   /

$2 z_4 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = 0 - 2 + 2i \Rightarrow z_4 = -1 + i$

$M_4 = -2 + i$

$M_1 = i \qquad M_2 = -i \qquad M_3 = -2 + i \qquad M_4 = -2 - i$

$y_h = A_1 \cdot \cos x + A_2 \cdot \sin x + e^{-2x}(A_3 \cdot \cos x + A_4 \cdot \sin x)$

قاعدة الحلول

$y_1 = \cos x \; , \; y_2 = \sin x \; ; \; y_3 = e^{-2x} \cos x + e^{-2x} \sin x$